Методи оптимізації та дослідження операцій.

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

<u>симплекс-метод</u>

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \quad (2)$$

$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$ (3)

Розраховують і заповнюють початкову симплекс-таблицю з допустимим одиничним базисом.

1. визначають вектор $\mathbf{A}_j$, що вводиться до базису (напрямний стовпець) із умови $\Delta_j = \min_k \{\Delta_k \mid \Delta_k < 0\}$
2. визначають вектор $\mathbf{A}_i$, який треба вивести з базису (напрямний рядок) із умови $\dfrac{a_{i0}^{(k)}}{a_{ij}^{(k)}} = \min_{1 \le r \le m} \{ \dfrac{a_{r0}^{(k)}}{a_{rj}^{(k)}} \mid a_{rj}^{(k)} > 0 \}$.

3. Виконують один крок (інтерацію) методу повного виключення Гаусса .
Якщо всі $\Delta_j^{(k+1)} \geq 0$, ,то новий базисний розв‘язок оптимальний. У противному разі переходять на чергову ітерацію.

Приклад . Розв‘язати симплекс-методом таку задачу:

$$\max(x_1 + 2x_2)$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 8$$
$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\max(x_1 + 2x_2 - Mx_6)$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 6$$
$$x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

			1	2				-M
	Bx	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	x_3	8	2	3	1	0	0	0
0	x_4	6	2	1	0	1	0	0
-M	x_6	1	1	1	0	0	-1	1
		-M	-M-1	-M-2	0	0	M	0

			1	2			
	Bx	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	6	0	1	1	0	2
0	x_4	4	0	-1	0	1	2
1	x_1	1	1	1	0	0	-1
		1	0	-1	0	0	-1

			1	2			
	Bx	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	5	-1	0	1	0	3
0	x_4	5	1	0	0	1	1
2	x_2	1	1	1	0	0	-1
		2	1	0	0	0	-2

			1	2			
	Вх	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_5	5/3	-1/3	0	1/3	0	1
0	x_4	10/3	4/3	0	-1/3	1	0
2	x_2	8/3	2/3	1	1/3	0	0
		16/3	1/3	0	2/3	0	0

$x_2^0 = \frac{8}{3}$

$x_1^0 = 0$

$F = \frac{16}{3}$

Ответ: $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = \frac{8}{3}$.

Двоїстий симплекс-метод

Запишемо двоїсту задачі стосовно задачі (1-3)в загальному вигляді.

Двоїста задача:

$$\text{мінімізувати } \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (4)$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,\ j = 1,2,..,n, \qquad (5)$$

$$y_i \geq 0,\ i=1, 2,\ldots, m. \qquad (6)$$

Відшукують спряжений базис двоїстої задачі $\{A_i\}$, $i \in$ Iб та псевдоплан $\{x_{i0}\}$, $i \in$ Iб прямої задачі .Якщо має місце випадок $x_{i0} \geq 0$, $\forall$ $i \in$ Iб , то початковий псевдоплан є оптимальним планом прямої задачі. При наявності від’ємних компонент x_{i0} обчислюємо коефіцієнти розкладання векторів Aj за векторами спряженого базису $A_j = \sum_{i \in I_b} A_i x_{ij}$.

складають таблицю *k-i* - ітерації (аналогічну симплекс-таблиці).

Приклад .

Розв'язати задачу лінійного програмування двоїстим симплекс-методом.

$$\max(x_1 + 2x_2)$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 15$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 6$$
$$x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

або в розширеній формі

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15,$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 6,$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 8,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Двоїста задача записується так:

$$\min(15y_1 + 6y_2 + 8y_3)$$
$$2y_1 + y_2 + y_3 \ge 1; A_1$$
$$3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2; A_2$$
$$y_1 \ge 0; A_3$$
$$-y_2 \ge 0; A_4$$
$$y_3 \ge 0; A_5$$

Виберемо за спряжений базис вектори $\{A_2, A_3, A_4\}$ $\begin{array}{l} 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 2; A_2 \\ y_1 = 0; A_3 \\ y_2 = 0; A_4 \end{array}$

Знайдемо псевдоплан X_0 прямої задачі . Для цього розв'яжемо систему рівнянь $A_0 = \sum_{i \in I_b} A_i x_{io}$

$$A_0 = A_2 x_{20} + A_3 x_{30} + A_4 x_{40}$$
$$\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_{20} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_{30} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_{40}$$
$$x_{20} = 8; x_{30} = -9; x_{40} = 10;$$

Оскільки $X_{30} < 0$,
обчислюємо коефіцієнти розкладання векторів $\mathbf{A}_j$ за векторами спряженого базису $\{x_{ij}\}$

$$A_j = \sum_{i \in I_b} A_i x_{ij}$$

$$A_1 = A_2 x_{21} + A_3 x_{31} + A_4 x_{41}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_{21} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_{31} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_{41}$$

$$x_{21} = 1; x_{31} = -1; x_{41} = 1;$$

$$A_5 = A_2 x_{25} + A_3 x_{35} + A_4 x_{45}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_{25} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_{35} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_{45}$$

$$x_{25} = 1; x_{31} = -3; x_{41} = 2;$$

				1	2	0	0	0
		B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	2	X_2	8	1	1	0	0	1
←	0	X_3	-9	-1	0	1	0	**-3**
	0	X_4	10	1	0	0	1	2
		Δ		1	0	0	0	2
		ϴ		1				2/3
								↑

B_x	A_0
X_2	5
X_5	3
X_4	4

Оскільки всі елементи стовпця $\mathbf{A}_0$

$$x_{i0} \geq 0, \forall i \in \mathrm{I}_б$$

, то знайдено оптимальний план, причому: $x_1^o = 0; x_2^o = 5; F = 10$

<u>Дослідження моделей задач лінійного програмування на чутливість.</u>

Цільова функція L(x) - це дохід від реалізації плану виробництва x; aij - інтенсивність використання i-го ресурсу при j-му способі виробництва; bi- наявний рівень i-го ресурсу.

1. Варіювання обмежених ресурсів. Припустимо, що значення ресурсів b=|| bi || варіюються. Тоді виникають питання: при яких варіаціях правих частин

обмежень знайдений оптимальний план x0 не змінюється; як ці варіації впливають на функцію максимального доходу Lmax

2. Варіювання елементів матриці обмежень А.

3. Додавання ще одного способу виробництва. Треба визначити, чи буде рентабельним випуск (n+1)-го продукту .

Приклад .

Підприємство випускає вироби двох видів, для виготовлення яких використовуються ресурси двох типів. Нехай прибуток від продажу виробів становить відповідно $c_1= 2$ та $c_2= 1$, обсяг ресурсів дорівнюють $b_1=40$, $b_2=56$ відповідно. Норми витрат ресурсів на одиницю випуску задаються такою матрицею:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

1. Треба знайти оптимальний план випуску, що максимізує сумарний доход та дослідити чутливість цільової функції до варіації обмежених ресурсів, тобто як зміниться сумарний доход при збільшенні на одиницю кожного з видів ресурсів.
2. Нехай перший ресурс b_1 зменшився до 36 , а другий збільшився до 60 . Як зміниться при цьому оптимальний розв‘язок, чи залишиться оптимальним попередній базис?
3. Нехай вводиться додаткове обмеження на випуск `1-го продукту $x_1 \geq 9$ Визначити новий оптимальний план.
4. Нехай підприємство може додатково випускати третій вид продукції, для якого $c_3= 2$, а норми витрат ресурсів дорівнюють $a_{13} =2$; $a_{23}= 4$. Знайти оптимальний план за цієї умови

$$\max (2 x_1+ x_2)$$

$$4 x_1+ x_2 \leq 40;$$

$$2 x_1+5 x_2 \leq 56;$$

$$x_1\geq 0, \quad x_2\geq 0.$$

$$4 x_1+ x_2 + x_4=40;$$

$$2 x_1+5 x_2+ x_5 =56;$$

Табл. 1.

c_j			2	1	0	0
	Bx	**A**0	**A**1	**A**2	**A**4	**A**5
2	x_1	8	1	0	$\frac{5}{18}$	$-\frac{1}{18}$
1	x_2	8	0	1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
	Δ	24	0	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$x_1^0=8$; $x_2^0=8$;

max $(2x_1+x_2)=24$.

$y_1^0=\Delta_4^{(\text{пр})}=\frac{4}{9}$; $y_2^0=\Delta_5^{(\text{пр})}=\frac{1}{9}$.

2. B1=36 B2= 60

$\mathbf{B}^{н}=[\,36;\,60\,]^{T}$.

$$\begin{bmatrix} x_1^{\text{н}} \\ x_2^{\text{н}} \end{bmatrix}=\mathbf{A}_x^{-1}\mathbf{B}^{\text{н}}=\begin{bmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 36 \\ 60 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{20}{3} \\ \frac{28}{3} \end{bmatrix}.$$

Оскільки $x_1^{\text{н}}=\frac{20}{3}>0;\ x_2^{\text{н}}=\frac{28}{3}>0$ то цей розв‘язок буде оптимальним .

3. Нехай введено додаткове обмеження $x_1 \geq 9$.

Зведемо його до стандартного вигляду:

$x_1 - x_6 = 9 \rightarrow -x_1 + x_6 = -9$.

Допишемо цей рядок до симплекс-таблиці 1., і одночасно праворуч до неї стовпець $\mathbf{A}_6$. Одержимо табл. 2.

Табл. 2.

c_j			2	1	0	0	
	B$_x$	**A**$_0$	**A**$_1$	**A**$_2$	**A**$_4$	**A**$_5$	**A**$_6$
2	x_1	8	1	0	$\frac{5}{18}$	$-\frac{1}{18}$	0
1	x_2	8	0	1	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
	x_6	-9	-1	0	0	0	1
	x_6'	-1	0	0	$\frac{5}{18}$	$-\frac{1}{18}$	1

c_i		
	B$_x$	**A**$_0$
2	x_1	9
1	x_2	4
	X_5	18
	Δ	22

Оскільки x_1 >0, x_2 >0, то цей новий розв‘язок оптимальний $L_{\max}$=22.

4. Перевіримо доцільність введення третього способу виробництва. $\Delta_3 = a_{13}y_1^0 + a_{23}y_2^0 - c_3 = 2\cdot\frac{4}{9} + 4\cdot\frac{1}{9} - 2 = -\frac{2}{3} < 0$. Оскільки Δ_3<0, то випуск 3-го виду продукції стає рентабельним, і попередній оптимальний план змінюється. Згідно з методом оберненої матриці обчислюємо його вигляд $A_3^{(н)}$, в якому можна дописати до таблиці 1.

$$A_3^{н} = A_x^{-1} A_3 = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Нелінійне програмування

Задача нелінійного програмування (задача НП) в загальному вигляді :

$\min f(\mathbf{x})$ (7)

$g_i(\mathbf{x}) \le 0$, $i = \overline{1, m}$. (8)

де функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та/ або $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$, $i = \overline{1, m}$ нелінійні

<u>**Теорема Куна-Таккера.**</u>

$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0$(9)

$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, $\lambda_i \ge 0$, $i = \overline{1, m}$ (10)

(10) -умова доповнювальної нежорсткості .Визначимо функцію Лагранжа таким чином: $L(\mathbf{x}, \mathbf{\Lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x})$.

$\max f(\mathbf{x})$ (11)

$g_i(\mathbf{x}) \ge 0$, $i = \overline{1, m}$; (12)

$x_j \ge 0$, $j = \overline{1, n}$ (13)

де $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$ вгнуті .

Теорема . *Нехай задачу НП задано у вигляді* (11) – (13).*а функції* $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $i = \overline{1, m}$, – *диференційовні. Для того щоб вектор* $\mathbf{x}^0$ *був оптимальним , розв'язком цієї задачі, необхідно, щоб існував такий вектор* $\mathbf{\Lambda}^0 \ge 0$, *для якого виконувалися б такі умови:*

$\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \mathbf{\Lambda}^0)}{\partial x_j} \le 0$, $j = \overline{1, n}$ (14) $\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \mathbf{\Lambda}^0)}{\partial x_j} \cdot x_j^0 = 0$, $j = \overline{1, n}$ (15)

$\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \mathbf{\Lambda}^0)}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathbf{x}^0) \ge 0$, $i = \overline{1, m}$ (16) $\frac{\partial L(\mathbf{x}^0, \mathbf{\Lambda}^0)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^0 = 0$, $i = \overline{1, m}$ (17)

***Приклад* .** Розв’язати таку задачу нелінійного програмування (НП)

$$f(x_1, x_2) = \max(32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2) \qquad (1)$$

при обмеженнях

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 2x_1 - x_2 = 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} 20 - 2x_1 - 5x_2 \ge 0, \\ 8 - 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Оскільки $f_{11} = \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = -8 < 0,$

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -30 \end{vmatrix} > 0,$$

то $f(x_1, x_2)$ угнута, і ця задача є задачею квадратичного програмування.

Побудуємо функцію Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = (32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2) + \lambda_1(20 - 2x_1 - 5x_2) + \lambda_2(8 - 2x_1 + x_2).$ Застосувавши теорему Куна-Таккера, одержимо такі умови для оптимального розв’язку:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 32 - 8x_1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 120 - 30x_2 - 5\lambda_1 + \lambda_2 \le 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 20 - 2x_1 - 5x_2 \ge 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 8 - 2x_1 + x_2 = 0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

та умови доповняльної нежорсткості

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \cdot x_1 = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} \cdot x_2 = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \cdot \lambda_1 = 0. \qquad (4)$$

Увівши в систему (3) вільні змінні v_1, v_2, w_1 дістанемо таку систему:

$$\left.\begin{aligned}
&32-8x_1-2\lambda_1-2\lambda_2+v_1=0,\\
&120-30x_2-5\lambda_1+\lambda_2+v_2=0,\\
&20-2x_1-5x_2-w_1=0,\\
&8-2x_1+x_2=0.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

та умови доповняльної нежорсткості

$$x_1 \cdot v_1 = 0; \qquad x_2 \cdot v_2 = 0; \qquad \lambda_1 \cdot w_1 = 0. \qquad (6)$$

Друге обмеження в умовах (2) виконується як строга рівність, тому немає обмеження на знак змінної λ_2, оскільки симплекс-метод дає змогу знаходити лише невід'ємні базисні розв'язки, то зробимо заміну змінних: $\lambda_2 = \lambda_3 - \lambda_4; \quad \lambda_3 \geq 0; \quad \lambda_4 \geq 0$. Запишемо систему (5) в еквівалентному вигляді

$$\left.\begin{aligned}
&8x_1+2\lambda_1+2\lambda_3-2\lambda_4-v_1=32,\\
&30x_2+5\lambda_1-\lambda_3+\lambda_4-v_2=120,\\
&2x_1+5x_2+w_1=20,\\
&2x_1-x_2=8.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Треба знайти ДБР системи (7), що задовольняє всі умови (6). Для цього застосуємо метод штучних змінних.

$$\text{мінімізувати } M(y_1+y_2+y_3) \quad (8)$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned}
&8x_1+2\lambda_1+2\lambda_3-2\lambda_4-v_1+y_2=32,\\
&30x_2+5\lambda_1-\lambda_3+\lambda_4-v_2+y_3=120,\\
&2x_1+5x_2+w_1=20,\\
&2x_1-x_2+y_1=8.
\end{aligned} \quad (9)$$

Розв'язуємо задачу (8), (9) симплекс-методом при додатковому обмеженні (6) .

Таблиця 1

c_j / c_i		0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M	M
	Bx	A_0	x_1	x_2	λ_1	λ_3	λ_4	v_1	v_2	w_1	y_1	y_2	y_3
0	w_1	20	2	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0
M	y_1	8	2	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
M	y_2	32	8	0	2	2	-2	-1	0	0	0	1	0
M	y_3	120	0	$\boxed{30}$	5	-1	1	0	-1	0	0	0	1
	Δ	160M	10M	29M	7M	M	-M	-M	-M	0	0	0	0

Таблиця .2

c_i / c_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M
	Bx	A_0	x_1	x_2	λ_1	λ_3	λ_4	v_1	v_2	w_1	y_1	y_2
0	w_1	0	$\boxed{2}$	0	-5/6	1/6	-1/6	0	1/6	1	0	0
M	y_1	12	2	0	1/6	-1/30	1/30	0	-1/30	0	1	0
M	y_2	32	8	0	2	2	-2	-1	0	0	0	1
0	x_2	4	0	1	1/16	-1/30	1/30	0	-1/30	0	0	0
	Δ	44 M	10 M	0	$2\frac{1}{6}M$	$1\frac{29}{30}M$	$-1\frac{29}{30}M$	-M	$-\frac{M}{30}$	0	0	0

Таблиця 3

c_j / c_i		0	0	0	0	0	0	0	0	0	M	M

	Bx	A_0	x_1	x_2	λ_1	λ_3	λ_4	v_1	v_2	w_1	y_1	y_2
0	x_1	0	1	0	-5/12	1/2	-1/2	0	1/12	1/2	0	0
M	y_1	12	0	0	1	-1/5	1/5	0	-1/5	-1	1	0
M	y_2	32	0	0	$\boxed{16/3}$	4/3	-4/3	-1	-2/3	-4	0	1
0	x_2	4	0	1	1/6	-1/30	1/30	0	-1/30	0	0	0
	Δ	44M	0	0	19M/3	17M/5	-17M/5	-M	-13M/15	-5M	0	0

Таблиця 4

c_i \ c_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	M
	Bx	A_0	x_1	x_2	λ_1	λ_3	λ_4	v_1	v_2	w_1	y_1
0	x_1	5/2	1	0	0	3/16	-3/16	-5/64	1/32	3/16	0
M	y_1	6	0	0	0	-9/20	$\boxed{9/20}$	3/16	-3/40	-1/4	1
0	λ_1	6	0	0	1	1/4	-1/4	-3/16	-1/8	-3/4	0
0	x_2	3	0	1	0	-3/40	3/40	1/32	-1/80	1/9	0
	Δ	6M	0	0	0	-9M/20	9M/20	3M/16	-3M/40	M/4	0

Таблиця 5

c_j / c_i		
	Bx	A_0
0	x_1	5
0	λ_4	40/3
0	λ_1	28/3
0	x_2	2
	Δ	0

одержимо оптимальний розв'зок, що задавольняї умовам доповняльної нежорсткості:

$$x_1^0 = 5; \quad x_2^0 = 2; \quad \lambda_1^0 = \frac{28}{3}; \quad \lambda_2^0 = \lambda_3^0 - \lambda_4^0 = -\frac{40}{3};$$

Метод перебору.

$$f(x_1, x_2) = \max(32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 20 - 2x_1 - 5x_2 \geq 0, \\ 8 - 2x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}\right\}$$

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = (32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2)$$
$$+\lambda_1(20 - 2x_1 - 5x_2) + \lambda_2(8 - 2x_1 + x_2).$$

Застосувавши теорему Куна-Таккера, одержимо такі умови для оптимального розв'язку:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1} = 32 - 8x_1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0;\\
&\frac{\partial L}{\partial x_2} = 120 - 30x_2 - 5\lambda_1 + \lambda_2 \le 0;\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 20 - 2x_1 - 5x_2 \ge 0;\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 8 - 2x_1 + x_2 = 0.
\end{aligned}\right\}$$

та умови доповняльної нежорсткості

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \cdot x_1 = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} \cdot x_2 = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \cdot \lambda_1 = 0.$$

$$\lambda_1 \ge 0$$

Припустимо: $x_1 \ne 0, x_2 \ne 0, \lambda_1 \ne 0$

з умов доповняльної нежорсткості одержимо

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0\\
&\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &32-8x_1-2\lambda_1-2\lambda_2=0;\\ &120-30x_2-5\lambda_1+\lambda_2=0;\\ &20-2x_1-5x_2=0;\\ &8-2x_1+x_2=0. \end{aligned}\right\}$$

одержимо :

$$x_1=5;\quad x_2=2;\quad \lambda_1=\frac{28}{3};\quad \lambda_2=-\frac{40}{3}$$

Оскільки : $x_1>0, x_2>0, \lambda_1>0$

цей розв'зок- оптимальний .

<u>Метод можливих напрямків. Метод Зойтендейка</u>

$\min f(\mathrm{x})$ (18)

$\mathrm{Ax}\le \mathrm{b}$ (19)

$\mathrm{Hx}=\mathrm{h}$ (20)

Попередній етап. Знайти початкову допустиму точку, для якої

$\boldsymbol{Ax}_1\le \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Hx}_1=\boldsymbol{h}$

Основний етап.

k *-та ітерація.*

Перший крок. Нехай знайдено x_k .

Припустимо, що

$\mathrm{A}_1\mathrm{x}_k=\mathrm{b}_1$

$\mathrm{A}_2\mathrm{x}_k<\mathrm{b}_2$

За можливий напрямок спуску S_k взяти оптимальний розв'язок такої задачі:

$\min \nabla f(\mathrm{x}_k)^T\mathrm{S}$ (21)

при обмеженнях

$A_1 S \le 0$ (22)

$HS = 0$ (23)

$-1 \le S_j \le 1, \quad j = \overline{1,n}$ (24)

Якщо $\nabla f(\mathrm{x}_k)^T \mathrm{S}_k^* = 0$, то зупинитися, і x_k – оптимальний розв’язок (точка Куна-Таккера). У противному разі перейти до другого кроку.

Другий крок. Покласти λ_k таким, що дорівнює оптимальному розв’язку наведеної нижче задачі одновимірної оптимізації:

$\min f(\mathrm{x}_k + \lambda \mathrm{S}_k)$ (25)

$0 \le \lambda \le \lambda_{\max}$ (26)

Обчислити $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{S}_k$

і перейти до першого кроку наступної ітераці

Приклад . Розглянемо задачу:

Задача з лінійними обмеженнями

$f(x_1, x_2) = \min(x_1 - 6)^2 (x_2 - 2)^2$

$-x_1 + 2x_2 \le 4$

$3x_1 + 2x_2 \le 12$

$-x_1 \le 0$

$-x_2 \le 0$

Попередній етап. Початкова допустима точка

$X^1 = [0; 0]$

Основний етап.

1-а ітерація.

Перший крок.

$\nabla f(x) = [2(x_1 - 6);\ 2(x_2 - 2)]$

$\nabla f(x^1) = [-4; -6]$

$\min(-12s_1 - 4s_2)$

$-s_1 \le 0$

$-s_2 \le 0$

$-1 \le s_1, s_2 \le 1$

$s_1 = 1$

$s_2 = 1$

$F = -10$

Другий крок.

$\min f(\mathrm{x}_1 + \lambda \mathrm{S}_1)$

$\min(\lambda - 6)^2 (\lambda - 2)^2$

$$\begin{cases} 4\lambda - 16 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \\ \lambda \le 4 \\ 5\lambda \le 12 \Rightarrow \lambda \le 12/5 \\ \lambda \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 12/5$$

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \lambda\, \mathbf{S}_1$$

$$X^2 = [12/5; 12/5]$$

переходимо на 2-у ітерацію на перший крок.

Алгоритм Зойтендейка у випадку нелінійних обмежень-нерівностей

min $f(\mathrm{x})$ (27)

$g_i(\mathrm{x}) \le 0, \quad i = \overline{1, m}$ (28)

Розглянемо задачу НП (27), (28). *Нехай* x_k *– допустима точка, а* I*– множина індексів активних обмежень в цій точці, тобто* $I = \{i : g_i(\mathrm{x}_k) = 0\}$. *Припустимо, крім того, що функції* $f(\mathrm{x}), g_i(\mathrm{x})$ *для* $i \in I$ *диференційовні в точці* x_k, *а функції* $g_i(\mathrm{x})$ *для* $i \notin J$ *неперервні в цій точці. Якщо*

$\nabla f(\mathrm{x}_k)^T \mathrm{S} < 0$ (29)

$\nabla g_i(\mathrm{x}_k)^T \mathrm{S} < 0$ (30) *при* $i \in I$, *то вектор* S *є можливим напрямком спуску.*

Попередній етап. Вибрати точку x_1, для якої $g_i(\mathrm{x}_1) \le 0, \quad i = \overline{1, m}$.

Основний етап.

k *-та ітерація.*

Перший крок. Покласти $I=\{i: g_i(\mathrm{x}_k)=0\}$ і розв'язати задачу:

$\min(z)$ (31)

при обмеженнях

$\nabla f(\mathrm{x}_k)^T \mathrm{S}-\mathrm{z}\le 0$ (32)

$\nabla g_i(\mathrm{x}_k)^T \mathrm{S}-\mathrm{z}\le 0, \quad i\in I$ (33)

$-1\le S_j\le 1 \quad j=\overline{1,n}$ (34)

Нехай $(\mathrm{z}_k,\mathrm{S}_k)$ – оптимальний розв'язок задачі (31) – (34). Якщо $\mathrm{z}_k=0$ то кінець алгоритму і точка x_k – оптимальний розв'язок такої задачі одновимірної оптимізації. Якщо $\mathrm{z}_k<0$, то перейти до другого кроку.

Другий крок.

$\min f(\mathrm{x}_k+\lambda\mathrm{S}_k)$ (35)

$0\le\lambda\le\lambda_{\max}$

де $\lambda_{\max}=\sup\{\lambda: g_i(\mathrm{x}_k+\lambda\mathrm{S}_k)\le 0,\ i=\overline{1,m}\}$

Покласти

$\mathrm{x}_{\mathrm{k+1}}=\mathrm{x}_k+\lambda\mathrm{S}_k$ і перейти до першого кроку наступної ітерації.

***Приклад* .** *Розглянемо задачу:*

Задача з нелінійними обмеженнями

$min((x_1 - 2x_2)^2 + 5(x_1 - 8)^2)$

$x_1^2 - 5x_2 \leq 10$ *(1)*

$x_1 + 2x_2 \leq 8$ *(2)*

$-x_1 \leq 0$ *(3)*

$-x_2 \leq 0$ *(4)*

Попередній етап. Початкова допустима точка

$X^1 = [0; 0]$

Основний етап.

1-а ітерація.

Перший крок.

$min(z)$

$\nabla f(x^1)^T s - z \leq 0$

$\nabla g(x^1)^T s - z \leq 0, i \in I$

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 2x_2) + 10(x_1 - 8) \\ -4(x_1 - 2x_2) \end{pmatrix}$

$\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\min(z)$

$-80s_1 - z \leq 0$

$-s_1 - z \leq 0$

$-1 \leq s_1 \leq 1$

$s_1 = 1$

$z = -80$

Другий крок.

$\min((\lambda s_1)^2 + 5(\lambda s_1 - 8)^2)$

$2\lambda + 10\ (\lambda - 8) = 0$

$\lambda = 20/3$

Обмеження

$\lambda^2 \leq 10 \Rightarrow \lambda \leq \sqrt{10}$

$\lambda \leq 8 \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \lambda = \sqrt{10}$

$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \lambda\, \mathbf{S}_1$

$X^2 = [\sqrt{10}; 0]$

переходимо на 2-у ітерацію на перший крок.

Багатокритеріальна задача.

Постановка багатокритеріальної задачі прийняття рішень і її властивості.

max $f_i(x), \qquad \forall i \in I_1,\ I_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$ (36)

min $f_i(x), \forall i \in I_2\ \ I_2 = \{m+1, m+2, \ldots, M\}$ (37)

Введемо такі відношення на множині альтернатив при наявності множини цільових функцій (критеріїв):

а) слабкої переваги (не гірше) $\succeq$: казатимемо, що $x_1 \succeq x_2$, коли

$$\begin{cases} f_i(x_1) \geq f_i(x_2), & \forall i \in I_1, \\ f_i(x_1) \leq f_i(x_2), & \forall i \in I_2 \end{cases} \quad (38)$$

б) строгої переваги (краще): $x_1 \succ x_2$, тоді і тільки тоді, коли система нерівностей (38) виконується і хоча б одна з них – строго;

в) еквівалентності: $x_1 \sim x_2$ тоді і тільки тоді, коли $f_i(x_1) = f_i(x_2) \quad \forall i \in I$

Альтернатива x_0 *зветься ефективною, якщо на множині допустимих альтернатив А не існує такої альтернативи* $\hat{x}$, *для якої б виконувалися нерівності:*

$$f_i(\hat{x}) \geq f_i(x_0), \quad \forall i \in I_1, \qquad (39)$$

$$f_i(\hat{x}) \leq f_i(x_0), \quad \forall i \in I_2 \qquad (40)$$

і хоча б одна з них була строгою.

Оскільки ц. ф. мають різну розмірність, то потрібно ввести деяке перетворення $w_i(f_i(x))$, що приведе $f_i(x)$ до безрозмірного вигляду.

$$w_i(f_i(x)) = \begin{cases} \dfrac{f_i^0 - f_i(x)}{f_i^0 - f_{i\min}}, \forall i \in I_1; \\ \dfrac{f_i(x) - f_i^0}{f_{i\max} - f_i^0}, \forall i \in I_2; \end{cases} \qquad (41)$$

ТЕОРЕМА . *Для того, щоб альтернатива була ефективною при заданому векторі переваг* $\rho > 0$, *достатньо, щоб* x^* *був єдиним розв‘язком системи нерівностей*

$$\rho_i w_i(x) \leq k_0, \forall i \in I \qquad (42)$$

для мінімального значення параметра k_0^*, *при якому ця система сумісна* .

Із цієї теореми випливає, що визначене вище компромісне рішення можна знайти як єдиний розв‘язок системи нерівностей вигляду (42) для мінімального значення параметра k_0 при якому ця система ще сумісна.

$$\min k_0 \qquad (43)$$

$$\rho_i w_i(x) \leq k_0, \forall i \in I \qquad (44)$$

Для компромісного розв‘язку зважені втрати за всіма критеріями однакові та мінімальні $\rho_i w_i(x) = k_{0\min}, \forall i \in I$ (45)

Приклад 5.

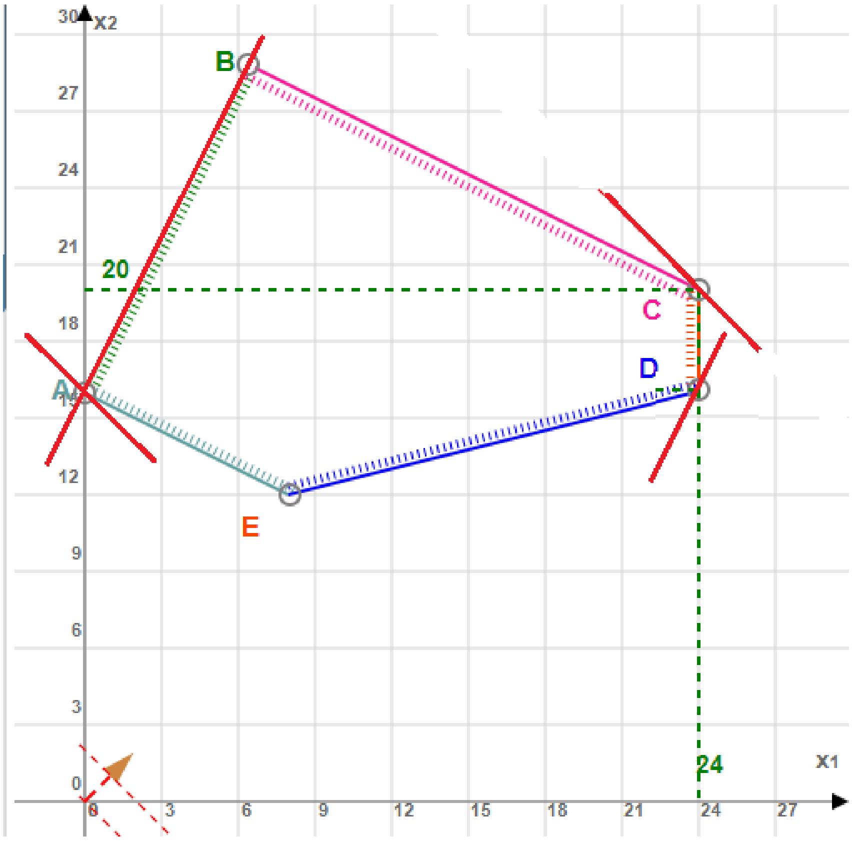
Знайти найкращий компромісний розв'язок наступної задачі багатокритеріальної оптимізації

$$F_1(x) = x_1 + x_2 \to \max$$
$$F_2(x) = 2x_1 - x_2 \to \min$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 32$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 64$$
$$-x_1 + 4x_2 \geq 40$$
$$x_1 \leq 24$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$\rho_1 = \rho_2 = 0.5$$

Розв'язок

Допустиму множину розв'язків задачі R(x) зобразимо на малюнку у вигляді багатокутника ABCDE.



$\boldsymbol{A(0;16); B(6.4;28.8); C(24;20); D(24;16);}$

Графічно-оптимальний розв'язок цієї задачі за критерієм $F_1(x)$ знаходиться в точці

$\boldsymbol{C(x_1 = 24; x_2 = 20).}$

Йому відповідає $F_1(x)_{max}$ =44;

Мінімальне значення буде в точці $A(x_1 = 0; x_2 = 16)$, $F_1(x)_{min} = 16$;

За другим критерієм $F_2(x)$ *оптимальний розв'язок буде на грані AB* $A(x_1 = 0; x_2 = 16)$ *та* $B(x_1 = 6.4; x_2 = 28.8)$

Йому відповідає $F_2(x)_{min}$ *=-16;*

Максимальне значення буде в точці $D(x_1 = 24; x_2 = 16)$, $F_2(x)_{max} = 32$;

$$F_1(x)_{max} = 44;\ F_2(x)_{min} = -16;$$

$$F_1(x)_{min} = 16; \quad F_2(x)_{max}32;$$

Розглянемо випадок, коли критерії рівноцінні:

Отже, складемо систему рівнянь:

$$W_1' = \rho_1 W_1(x) = \rho_1 \cdot \frac{f_1^o - f_1(x)}{f_1^o - f_1 min}; W_2' = \rho_2 W_2(x) = \rho_2 \cdot \frac{f_2(x) - f_2^o}{f_2 max - f_2^o};$$

Запишемо еквівалентну задачу ЛП:

Z=min x_3*;*

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{44 - x_1 - x_2}{44 - 16} \leq x_3; \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_1 - x_2 + 16}{32 + 16} \leq x_3; \\ x_1 + 2x_2 \geq 32; \\ -2x_1 + x_2 \leq 16; \\ x_1 + 2x_2 \leq 64; \\ -x_1 + 4x_2 \geq 40; \\ x_1 \leq 24; \end{cases}$$

Вирішуємо цю систему симплекс методом і одержуємо:

$x_1^0 = 10.89$; $x_2^0 = 26.55$; $x_3 = 0.117$

$$F_1(x^*) = 37.44;\ F_2(x^*) = -4.77;$$

Парето оптимальні рішення лежать на відрізку BC.

$$\begin{cases} \frac{44 - 1x_1 - x_2}{28} = \frac{2x_1 - x_2 + 16}{48} \\ x_1 + 2x_2 = 64 \end{cases}$$

$$x_1^0 = 10.89 ; x_2^0 = 26.55$$